Желтый уровень

1. (5 баллов) Числа a и b являются корнями уравнения $x^2+tx+1=0$, а числа a+1 и b+1 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$. Чему равно p+q?

Ответ: 0.

Решение. По теореме Виета из первого уравнения $ab=1$, из второго уравнения
$p+q=-(a+1+b+1)+(a+1)(b+1)=ab-1=0$.

2. (5 баллов) В турнире по футболу приняли участие 19 команд с названиями «Спартак», «Динамо», «Локомотив» и «Торпедо» из 5 разных городов. Любые две команды или из разных городов, или имеют разные названия. В течение турнира не играли между собой команды одного названия, а также не играли между собой команды из одного города. Сколько игр было в турнире?

Ответ: 108.

Решение. Если бы в каждом городе были все 4 клуба, то было бы $5 \cdot 4 = 20$ команд. Добавим недостающую 20-ю команду. Тогда каждая команда сыграет с 3 командами из каждого из 4 других городов, то есть $4 \cdot 3 = 12$ игр. Значит, будет $20 \cdot 4 \cdot 3 : 2 = 120$ игр (деление на 2, потому что каждая игра учитывается дважды). Значит, без одной команды пройдёт $120 - 12 = 108$ игр.

3. (8 баллов) Внутри прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P. Найдите длину CP, если $AB = 15$, $BC = 10$, $AP = 9$, $BP = 12$.

Ответ: 10.

Решение. Пусть $PH=x$ — высота треугольника ABP, $BH=y$. Тогда из треугольников АРН и ВСН получаем уравнения $x^2+(15-y)^2=9^2, x^2+y^2=12^2$. Вычитая из второго первое, получаем $30y=15^2+12^2-9^2$, $y=9{,}6$. Тогда $x=7{,}2$. Получаем, что $CP=\sqrt{(10-7{,}2)^2+9{,}6^2}=10$.

4. (8 баллов) На прямой отмечены точки A, B, C, D (в указанном порядке). Длины отрезков AB, BC и CD составляют целое число сантиметров. При этом $AB : BC = 7 : 12$, $BC : CD = 9 : 5$. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AD?

Ответ: 77.

Решение. Отрезок BC составляет в первой пропорции 12 частей, во второй — 9 частей. Пусть $BC =$ НОК $(12; 9) \cdot t = 36t$. Тогда $AB = 36t : 12 \cdot 7 = 21t$. Получаем, что $CD = 36t : 9 \cdot 5 = 20t$, $AD = AB + BC + CD = 21t + 36t + 20t = 77t$. Минимальная длина при $t = 1$.

5. (10 баллов) Доску 8×8 разбили на 10 фигур по границам клеток. Среди этих частей нет двух с равной площадью. Обязательно ли среди них найдётся квадрат?

Ответ: обязательно найдётся квадрат 1×1.

Решение. Если среди частей нет квадрата 1×1, то данные 10 фигур займут не менее $2 + 3 + \ldots + 11 = 65$ клеток. Такое невозможно, так как на доске только 64 клетки.

6. (10 баллов) Вершины куба занумеровали натуральными числами от 1 до 8, использовав каждое число ровно один раз. Затем на каждом ребре куба написали сумму номеров, написанных на его концах. Какое наименьшее количество различных чисел могут оказаться написанными на ребрах куба?

Ответ: 5.

Решение. Оценка. На ребрах, выходящих из вершины 8, попарно разные числа, которые не менее 9. На ребрах, выходящих из вершины 1, попарно разные числа, которые не более 9. Всего не менее 5 разных значений.

Пример строится несложно.

7. (12 баллов) Диверсантом называется лжец, который выглядит как рыцарь и все его считают рыцарем. Среди трёх аборигенов A, B, C состоялся следующий диалог:

A: «Вы оба — лжецы!»

B: «Нет! Лжец только ты.»

C: «Друзья, мы все рыцари!»

Известно, что среди них ровно один диверсант. Определите, кто именно.

Ответ: C.

Решение. Если A говорит правду, то среди B и C нет диверсанта, то есть A — диверсант, он должен лгать. Противоречие. То есть A лжет. Значит, лжёт и C.

Тогда возможны 5 случаев.

	1	2	3	4	5
A	Л	Л	Л	Д	Д
B	Д	Л	Р	Р	Л
C	Л	Д	Д	Л	Л

Случай № 1 невозможен, ибо B не может не согласиться с A.

Случай № 2 невозможен, ибо B сказал правду.

Случай № 3 возможен.

Случай № 4 невозможен, ибо B солгал.

Случай № 5 невозможен, ибо B сказал правду.

8. (12 баллов) Сколько пятизначных чисел, в записи которых есть две рядом стоящие двойки?

Ответ: 3411.

Решение. Есть только одна пара рядом стоящих цифр 2: чисел вида 22***, *22**, **22* и ***22 — 900, 720, 729 и 810 штук, всего 3359 чисел. При этом числа 22*22 учтены дважды — их 9 штук.

Есть только две пары рядом стоящих цифр 2: чисел вида **222 — 81 штук, *222* — 72 штуки, 222** — 90 штук, всего 243 чисел.

Есть три пары рядом стоящих цифр 2: *2222 (8 штук) и 2222* (9 штук) - итого 17 чисел.

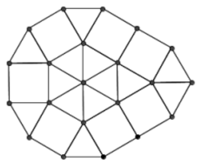
Если 4 пары, то одно число 22222.

Всего 3359 – 9 + 243 + 17 + 1 = 3411.

9. (15 баллов) Дан набор из плиток. Среди них есть только квадраты и правильные треугольники. Все стороны плиток равны. Можно ли из них сложить целиком заполненный 11-угольник?

Ответ: можно.

Решение. Возможна следующая конструкция.



10. (15 баллов) В строчку выписаны 5 ненулевых чисел так, что сумма любых трёх последовательных чисел положительна, а сумма всех чисел — отрицательна. На каких местах стоят числа, знак которых можно определить однозначно?

Ответ: третье число положительно.

Замечание. Такие наборы чисел существуют, например, –1, –1, 3, –1, –1 или –3, 1, 3, 1, –3.

Решение. Рассмотрим два примера: 1, –10, 10, 50, –59 и –59, 50, 10, –10, 1. Числа на четырёх позициях поменяли знак, значит, их знак определить нельзя. Среднее (третье) число должно быть положительным. Действительно, если даны числа a, b, c, d, e, то $0 < (a + b + c) + (c + d + e) = (a + b + c + d + e) + c$, откуда следует, что $c > 0$.